树德中学高2019级高三上学期10月阶段性测试数学（文科）试题

考试时间：120分钟　　满分：150分　　命题、审题：高三数学备课组

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分，每道题4个选项中只有一个符合题目要求）。

1．设集合 $A=\left\{x\in N^{*}\left|x^{2}-2x<0\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\frac{1}{2}\le x\le 3\right.\right\}$，则 $A\cap B=$

A．$\left\{x\left|\frac{1}{2}\le x<2\right.\right\}$　　B．$\left\{x\left|\frac{1}{2}<x\le 3\right.\right\}$　　C．$\{1\}$　　D．$\{1,2\}$

2．已知 $\bar{z}$ 是虚数 z 的共轭复数，则下列复数中一定是纯虚数的是

A．$z+\bar{z}$　　B．$z-\bar{z}$　　C．$z\cdot\bar{z}$　　D．$\frac{z}{\bar{z}}$

3. 某市物价部门对5家商场的某商品一天的销售量及其价格进行调查，5家商场的售价 x（元）和销售量 y（件）之间的一组数据如表所示：

价格 x	9	9.5	10	10.5	11
销售量 y	11	10	8	6	5

按公式计算，y 与 x 的回归直线方程是：$y=-3.2x+a$，相关系数 $|r|=0.986$，则下列说法错误的是

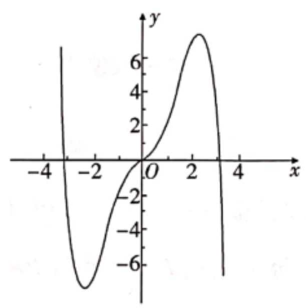
A．变量 x，y 线性负相关且相关性较强；　　B．$\hat{a}=40$；

C．当 $x=8.5$ 时，y 的估计值为12.8；　　D．相应于点 $(10.5,6)$ 的残差为0.4.

4．若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则"$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$"是"数列 $\{a_n\}$ 是等差数列"的

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

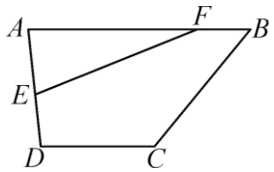
5．已知函数 $f(x)=e^{|x|}$，$g(x)=\sin x$，某函数的部分图象如图所示，则该函数可能是



A．$y=f(x)+g(x)$　　B. $y=f(x)-g(x)$

C．$y=f(x)g(x)$　　D．$y=\frac{g(x)}{f(x)}$

6．如图,在梯形 $ABCD$ 中，$AB//DC$，$AB=2CD$，E 为线段 AD 的中点，且 $4BF=AB$，则 $\overrightarrow{EF}=$



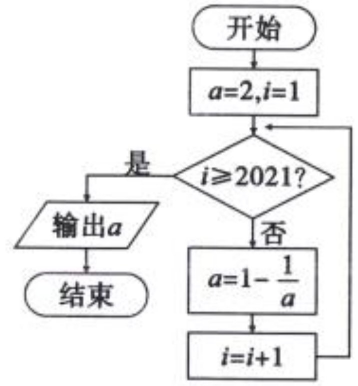
A．$\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$　　B．$\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}$

C．$\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$　　D．$\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

7. 曲线 $y=ax\cos x+16$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线与直线 $y=x+1$ 平行，则实数 a 的值为

A．$-\frac{2}{\pi}$　　B．$\frac{2}{\pi}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$-\frac{\pi}{2}$

8. 若执行如右图所示的程序框图，则输出的结果为



A．$\frac{1}{2}$　　B．-1　　C．1　　D．2

9. 已知正数 α，β 满足 $e^{\alpha}+\frac{1}{2\beta+\sin\beta}>e^{\beta}+\frac{1}{2\alpha+\sin\alpha}$，则下列不等式错误的是

A．$2^{\alpha-\beta+1}>2$　　B．$ln\alpha+\alpha<ln\beta+\beta$

C．$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>\frac{4}{\alpha+\beta}$　　D．$\frac{1}{e^{\alpha}}+\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{e^{\beta}}+\frac{1}{\beta}$

10. 已知四面体 $ABCD$ 的所有棱长均为 $\sqrt{2}$，M，N 分别为棱 AD，BC 的中点，F 为棱 AB 上异于 A，B 的动点．有下列结论：①线段 MN 的长度为1；②若点 G 为线段 MN 上的动点，则无论点 F 与 G 如何运动，直线 FG 与直线 CD 都是异面直线；③$\angle MFN$ 的余弦值的取值范围为 $[0,\frac{\sqrt{5}}{5})$；④$\triangle FMN$ 周长的最小值为 $\sqrt{2}+1$．其中正确结论的为

A．①②　　B．②③　　C．③④　　D．①④

11．已知 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上有最小值，无最大值，则 $\omega=$

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{14}{3}$　　C．$\frac{14}{3}$ 或 $\frac{38}{3}$　　D．$\left\{\omega\left|\omega=8k-\frac{10}{3},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

12．双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左顶点为 A，右焦点为 F，离心率为2，焦距为4.设 M 是双曲线 C 上任意一点，且 M 在第一象限，直线 MA 与 MF 的倾斜角分别为 α_1，α_2，则 $2\alpha_1+\alpha_2$ 的值为

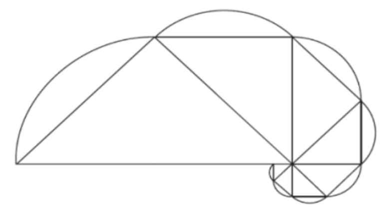
A．$\frac{\pi}{2}$　　B．$\frac{2\pi}{3}$　　C．π　　D．与M位置有关

二、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分）

13．为美化校园，创建读书角，同学将莫言的3部作品《红高粱》《酒国》《蛙》随机地排在书架上，《蛙》恰好放在三本书中间的概率是________.

14．已知变量 x，y 满足：$\begin{cases}x+y\le 3\\ y\le 2x\\ x,y\ge 0\end{cases}$，则 $z=x^2+(y-1)^2$ 的最小值为____________.

15．北宋著名建筑学家李诫编写了一部记录中国古代建筑营造规范的书《营造法式》，其中说到"方一百，其斜一百四十有一"，即一个正方形的边长与它的对角线的比是1:1.414，接近 $1:\sqrt{2}$.如图，该图由等腰直角三角形拼接而成，以每个等腰直角三角形斜边中点作为圆心，斜边的一半为半径作一个圆心角是90°的圆弧，所得弧线称为 $\sqrt{2}$ 螺旋线，称公比为 $\sqrt{2}$ 的数列为 $\sqrt{2}$ 等比数列.



已知 $\sqrt{2}$ 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $S_{n+2}=2S_n+2(1+\sqrt{2})$.若 $b_n=\log_{\sqrt{2}}a_n$，且 $\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{4b_i^2-1}\leqslant 10^{\lambda-5}$，则 λ 的最小整数为__________.（参考数据：$\lg 2\approx 0.3010$，$\lg 3\approx 0.4771$）

16．$f(x)$是定义在R上周期为 4 的函数，且$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{1-x^2}, x\in(-1,1] \\ 1-|x-2|, x\in(1,3]\end{cases}$，则下列说法中正确的是________.

①$f(x)$的值域为$[0,2]$②当$x\in(3,5]$时，$f(x)=2\sqrt{-x^2+8x-15}$③$f(x)$图象的对称轴为直线$x=4k,k\in Z$

④方程$3f(x)=x$恰有 5 个实数解

三、解答题（本大题分必考题和选考题两部分，第 17 题～第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22 题～第 23 题为选考题，考生根据要求作答.满分 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算过程）

17.（12 分）设函数$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}$，其中向量$\vec{m}=(2\cos x,1)$，$\vec{n}=(\cos x,\sqrt{3}\sin 2x)$.

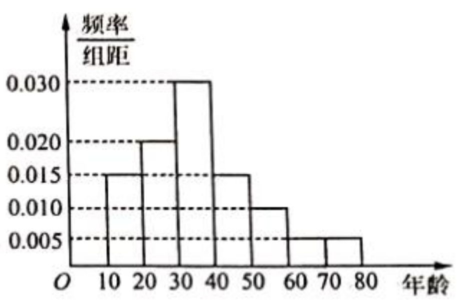
（1）求函数$f(x)$的最小正周期与单调递减区间；

（2）在$\triangle ABC$中，a、b、c分别是角A、B、C的对边，已知$f(A)=2$，$b=1$，$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，判断$\triangle ABC$的形状，并说明理由.

18.（12 分）某省举办线上万人健步走活动，希望带动更多的人参与到全民健身中来，以更加强健的体魄、更加优异的成绩，向中国共产党百年华诞献礼.为了解群众参与健步走活动的情况，随机从参与活动的某支队伍中抽取了60人，将他们的年龄分成7段：$[10,20)$，$[20,30)$，$[30,40)$，$[40,50)$，$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80]$后得到如图所示的频率分布直方图.

（1）以各组的区间中点值代表各组取值的平均水平，求这60人年龄的平均数；

（2）一支200人的队伍，男士占其中的$\frac{3}{8}$，40岁以下的男士和女士分别为30和70人，请补充完整2×2列联表，并通过计算判断是否有95%的把握认为40岁以下的群众是否参与健步走活动与性别有关.



	40岁以下	40岁以上	合计
男士	30		
女士	70		
合计			200

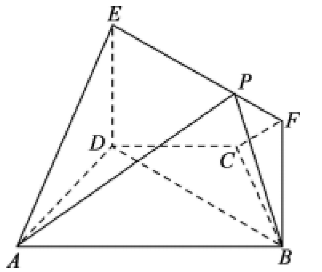
附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k_0)$	…	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	…	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.（12 分）如图，在梯形$ABCD$中，$AB//CD$，$AD=DC=CB=1$，$\angle BCD=120°$，四边形$BFED$为矩形，平面$BFED\perp$平面$ABCD$，$BF=1$.

（1）求证：$BD\perp$平面AED，$AD\perp$平面$BDEF$；

（2）点P在线段EF上运动，求三棱锥 C-PBD 的体积。



20.（12 分）已知F_1，F_2分别为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，椭圆上任意一点$P$到焦点距离的最小值与最大值之比为$\frac{1}{3}$，过$F_1$且垂直于长轴的椭圆$C$的弦长为3.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）过F_1的直线与椭圆C相交的交点A、B与右焦点F_2所围成的三角形的内切圆面积是否存在最大值？若存在，试求出最大值；若不存在，说明理由.

21.（12 分）设函数$f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$.

（1）求$f(x)$的单调区间；

（2）如果当$x>0$，且$x\neq1$时，$\frac{\ln x}{x+1}-\frac{k}{x}>f(x)$恒成立，求$k$的取值范围.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.作答时请写清题号

22.［选修 4-4：坐标系与参数方程］（10 分）

在平面直角坐标系中，以坐标原点为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，已知曲线C的极坐标方程为$\rho\sin^2\theta=2a\cos\theta(a>0)$，过点$P(-2,-4)$的直线$l$的参数方程为$\begin{cases}x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=-4+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），直线$l$与曲线$C$相交于A，$B$两点.

（1）写出曲线C的直角坐标方程和直线l的普通方程；

（2）若$|PA|\cdot|PB|=|AB|^2$，求a的值.

23.［选修 4-5：不等式选讲］（10 分）

已知函数$g(x)=|x-2|$，$f(x)=|x-a|$.

（1）当$a=1$时，解不等式$g(x)-f(x)-\frac{1}{2}>0$；

（2）若正数a，b，c，d满足$a^2+b^2=g(4)$，$c^2+d^2=1$，求$ac+bd$的最大值.

树德中学高 2019 级高三上学期 10 月阶段性测试数学（文科）试题参考答案

1-12　CBDCC　 DAABD　BC

13. $\dfrac{1}{3}$　　14. $\dfrac{1}{5}$　　15. 5　　16. ①②④

17. （1） $f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}=2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+1=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+1$，

所以最小正周期是 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$， $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$，解得 $k\pi+\dfrac{\pi}{6}\le x\le k\pi+\dfrac{2\pi}{3}$，

减区间是 $[k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{2\pi}{3}],k\in Z$；

（2）由（1） $f(A)=2\sin(2A+\dfrac{\pi}{6})+1=2$， $\sin(2A+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $2A+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{13\pi}{6})$，所以 $2A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$， $A=\dfrac{\pi}{3}$，

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 1\times c\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $c=2$，

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=1+4-2\times 1\times 2\times\dfrac{1}{2}=3$， $c^2=a^2+b^2$， $C=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

18．解：（1）这 60 人年龄的平均数为

$15\times 0.15+25\times 0.2+35\times 0.3+45\times 0.15+55\times 0.1+65\times 0.05+75\times 0.05=37$

（2） 由题意队伍中男士共 75 人，女士 125 人，则 2×2 列联表如下：

	40 岁以下	40 岁以上	合计
男士	30	45	75
女士	70	55	125
合计	100	100	200

$K^2=\dfrac{200\times(30\times 55-70\times 45)^2}{100\times 100\times 75\times 125}=4.8$　 $\because 4.8>3.8$

所以，有 95% 的把握认为 40 岁以下的群众是否参与健步走活动与性别有关.

19.（1）证明，在梯形 $ABCD$ 中，

$\because AB//CD$， $AD=DC=CB=1$， $\angle BCD=120^\circ$，

$\therefore \angle CDB=\angle CBD=30^\circ$， $\angle ADC=\angle DCB=120^\circ$， $\therefore \angle ADB=90^\circ$， $\therefore AD\perp BD$.

$\because$ 平面 $BFED\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $BFED\cap$ 平面 $ABCD=BD$， $DE\subset$ 平面 $BFED$， $DE\perp DB$，

又 $\because AD\cap DE=D$， $\therefore BD\perp$ 平面 ADE .

又四边形 $BDEF$ 是矩形， $\therefore ED\perp BD$， $\therefore ED\perp$ 平面 $ABCD$， $\therefore ED\perp AD$，

$\because ED\cap BD=D$， $\therefore AD\perp$ 平面 $BDEF$.

（2） $V_{C-PBD}=V_{P-BCD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 1=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

20.解：（1）由题意，椭圆上任意一点 P 到焦点距离的最小值与最大值之比为 $\dfrac{1}{3}$，

可得 $(a-c):(a+c)=\dfrac{1}{3}$，即 $a=2c$，

又由过 F_1 且垂直于长轴的椭圆 C 的弦长为 3，可得 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(a^2-c^2)}{a}=3$，

联立方程组，可得： $a=2$， $c=1$，所以 $b^2=a^2-c^2=3$，

故椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）设 $\triangle ABF_2$ 的内切圆半径为 r，可得 $S_{\triangle ABF_2}=\dfrac{1}{2}\left(|AF_2|+|AB|+|BF_2|\right)\cdot r$，

又因为 $|AF_2|+|AB|+|BF_2|=8$，所以 $S_{\triangle ABF_2}=4r$，

要使 $\triangle ABF_2$ 的内切圆面积最大，只需 $S_{\triangle ABF_2}$ 的值最大，

由题意直线 l 斜率不为 0，设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，直线 $l:x=my-1$，

联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=my-1\end{cases}$，整理得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

易得 $\Delta>0$，且 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$， $y_1\cdot y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，

所以 $S_{\triangle ABF_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1\cdot y_2}=\sqrt{\dfrac{36m^2}{(3m^2+4)^2}+\dfrac{36}{3m^2+4}}=\dfrac{12\sqrt{m^2+1}}{3(m^2+1)+1}$，

设 $t=\sqrt{m^2+1}\ge 1$，则 $S_{\triangle ABF_2}=\dfrac{12t}{3t^2+1}=\dfrac{12}{3t+\frac{1}{t}}$，设 $y=3t+\dfrac{1}{t}(t\ge 1)$，可得 $y'=3-\dfrac{1}{t^2}>0$，

所以当 $t=1$，即 $m=0$ 时， $S_{\triangle ABF_2}$ 的最大值为 3，此时 $r=\dfrac{3}{4}$，

所以 $\triangle ABF_2$ 的内切圆面积最大为 $\dfrac{9\pi}{16}$.

21.解：（1） $\because f'(x)=\dfrac{\frac{x-1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}=\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$. 令 $h(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x.\therefore h'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x^2}$.

当 $x\in(0,1)$ 时， $\therefore h'(x)>0,\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $\therefore h'(x)<0,\therefore h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

$\therefore$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $,h(x)\le h(1)=0.\therefore$ 当 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 时 $,f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$单调递减区间为$(0,1),(1,+\infty)$，没有单调递增区间.

（2）$\because$当$x>0$且$x\neq -1$时，$\frac{\ln x}{x+1}-\frac{k}{x}>f(x)$，$\therefore \frac{\ln x}{x+1}-\frac{\ln x}{x-1}-\frac{k}{x}>0$,

$\therefore \frac{1}{x^2-1}\left(2\ln x+\frac{x^2-1}{x}k\right)<0$. 令$g(x)=2\ln x+\left(x-\frac{1}{x}\right)k$，$g(1)=0$，

$\because$当$x\in(0,1)$时，$\frac{1}{x^2-1}<0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$\frac{1}{x^2-1}>0$.

$\therefore$当$x\in(0,1)$时，$g(x)>0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)<0$.

$\because g'(x)=\frac{2}{x}+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)k$，由$g'(1)=2+2k=0$得$k=-1$，

当$k\leq -1$时，$g'(x)=\frac{2}{x}+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)k\leq \frac{2}{x}-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{x^2-2x+1}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}\leq 0$.

$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，满足条件当$x\in(0,1)$时，$g(x)>0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)<0$.

$k\geq 0$时，$x>0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，不合题意，

$-1<k<0$时，由$g'(x)=0$得$kx^2+2x+k=0$，$\Delta=4-4k^2>0$，此方程有两个不等实根x_1,x_2，

$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2}{k}\\ x_1x_2=1\end{cases}$，因此$x_1>0,x_2>0$，必有一根小于 1 另一根大于 1，不妨设$0<x_1<1<x_2$，

则$x_1<x<x_2$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在(x_1,x_2)上单调递增，不合题意.

综上，$k\leq -1$.

22. 解：（1）由$\rho\sin^2\theta=2a\cos\theta(a>0)$得：$\rho^2\sin^2\theta=2a\rho\cos\theta$，

$\therefore$曲线C的直角坐标方程为：$y^2=2ax$，由$\begin{cases}x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=-4+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$消去$t$得：$y+4=x+2$，

$\therefore$直线l的普通方程为：$y=x-2$.

（2）直线l的参数方程为$\begin{cases}x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=-4+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），代入$y^2=2ax$，得到$t^2-2\sqrt{2}(4+a)t+8(4+a)=0$，

设A，B对应的参数分别为t_1，t_2，则t_1，t_2是方程的两个解，

由韦达定理得：$t_1+t_2=2\sqrt{2}(4+a)$，$t_1t_2=8(4+a)$，因为$|PA|\cdot|PB|=|AB|^2$，

所以$(t_1-t_2)^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=t_1t_2$，解得$a=1$.

23.解：（1）当$a=1$时，$g(x)-f(x)-\frac{1}{2}>0$，即$|x-2|-|x-1|>\frac{1}{2}$，

当$x\leq 1$时，$2-x-(1-x)>\frac{1}{2}$，即$1>\frac{1}{2}$恒成立，故$x\leq 1$，

当$1<x<2$时，$-(x-2)-(x-1)>\frac{1}{2}$，即$3-2x>\frac{1}{2}$，解得：$1<x<\frac{5}{4}$，

当$x\geq 2$时，$(x-2)-(x-1)>\frac{1}{2}$，$-1>\frac{1}{2}$不成立，不等式无解，

综上，不等式的解集是$\left\{x\mid x<\frac{5}{4}\right\}$.

（2）由题意得：$a^2+b^2=g(4)=|4-2|=2$，且$c^2+d^2=1$，

$\therefore (ac+bd)^2=(ac)^2+2abcd+(bd)^2\leq (ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=2$，$\therefore ac+bd\leq\sqrt{2}$.

$\because a$，b，c，d都是正数，$\therefore$当且仅当$a=b=1$，$c=d=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取“=”，$ac+bd$的最大值是$\sqrt{2}$.